25　不定積分

ことわり：積分定数を C とする。

基本問題 ＆ 解法のポイント

42

(1)

$$\int \frac{x^3+2}{x}dx = \int\left(x^2+\frac{2}{x}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3}+2\log|x|+C$$

(2)

$\dfrac{1}{x(x-1)^2} = \dfrac{p}{x}+\dfrac{q}{x-1}+\dfrac{r}{(x-1)^2}$ とおき，両辺を $x(x-1)^2$ 倍すると，

$1 = p(x-1)^2+qx(x-1)+rx$

これを x について整理すると，$(p+q)x^2-(2p+q-r)x+p-1=0$

これは x の恒等式だから，$\begin{cases} p+q=0 \\ 2p+q-r=0 \\ p-1=0 \end{cases}$ より，$(p,\ q,\ r)=(1,\ -1,\ 1)$

または，

$1 = p(x-1)^2+qx(x-1)+rx$ に

$x=0$ を代入すると，$p=1$

$x=1$ を代入すると，$r=1$

$x=2$ を代入すると，$1=p+2q+2r$

これと $p=r=1$ より，$q=-1$　$\therefore (p,\ q,\ r)=(1,\ -1,\ 1)$

よって，$\dfrac{1}{x(x-1)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{(x-1)^2}$

ゆえに，

$$\int\frac{1}{x(x-1)^2}dx = \int\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right\}dx$$
$$= \log|x|-\log|x-1|-\frac{1}{x-1}+C$$
$$= \log\left|\frac{x}{x-1}\right|-\frac{1}{x-1}+C$$

(3)

$\dfrac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{a}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$ より，

$$\int\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}dx=\frac{1}{a}\int\left(\sqrt{x-a}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$=\frac{2}{3a}\left\{(x-a)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right\}+C$$

(4)

$\sqrt{x+1}=t$ とおくと，　$x+1=t^2$ より，　$x=t^2-1$，　$dx=2tdt$

よって，

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x+1}}=\int\frac{2tdt}{\left(t^2-1\right)\cdot t}$$

$$=\int\frac{2}{t^2-1}dt$$

$$=\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\log|t-1|-\log|t+1|+C$$

$$=\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\log\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$$

43

(1)

$$\sin 2x\cos 3x=\frac{1}{2}\{\sin(2x+3x)+\sin(2x-3x)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)$$

より，

$$\int\sin 2x\cos 3xdx=\frac{1}{2}\int(\sin 5x-\sin x)dx$$

$$=-\frac{\cos 5x}{10}+\frac{\cos x}{2}+C$$

(2)

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \int \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)'}{e^x + e^{-x}} dx$$
$$= \log\left(e^x + e^{-x}\right) + C$$

(3)

$$\int xe^{-ax} dx = x \cdot \left(-\frac{e^{-ax}}{a}\right) + \frac{1}{a}\int e^{-ax} dx$$
$$= -\frac{xe^{-ax}}{a} - \frac{e^{-ax}}{a^2} + C$$
$$= -\frac{e^{-ax}}{a^2}(ax+1) + C$$

(4)

$$\sin^4 x = \left(\sin^2 x\right)^2$$
$$= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos^2 2x}{4}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 4x}{8}$$
$$= \frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}$$

より，

$$\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8}\right) dx$$
$$= \frac{\sin 4x}{32} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{3}{8}x + C$$

A

149

(1)

$$\cos^2 x\sin^3 x=\cos^2 x\sin^2 x\sin x$$
$$=\cos^2 x(1-\cos^2 x)\sin x$$
$$=\sin x\cos^2 x-\sin x\cos^4 x$$
$$=-\frac{1}{3}(\cos^3 x)'+\frac{1}{5}(\cos^5 x)'$$

よって，$\displaystyle\int\cos^2 x\sin^3 xdx=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C$

(2)

$\sqrt{x}=t$ とおくと，$x=t^2$ より，$dx=2tdt$

$$\therefore\int e^{\sqrt{x}dx}=2\int e^t tdt$$
$$=2\int t(e^t)'dt$$
$$=2\left(te^t-\int e^t dt\right)$$
$$=2(te^t-e^t)+C$$
$$=2(t-1)e^t+C$$
$$=2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$$

(3)

$$\int e^{ax}\cos xdx=\int e^{ax}(\sin x)'dx$$
$$=e^{ax}\sin x-a\int e^{ax}\sin xdx$$
$$=e^{ax}\sin x-a\int e^{ax}(-\cos x)'dx$$
$$=e^{ax}\sin x-a\left(-e^{ax}\cos x+a\int e^{ax}\cos xdx\right)$$
$$=e^{ax}(\sin x+a\cos x)-a^2\int e^{ax}\cos xdx$$

よって，$\displaystyle\int e^{ax}\cos xdx=e^{ax}(\sin x+a\cos x)-a^2\int e^{ax}\cos xdx$

すなわち，$\displaystyle(a^2+1)\int e^{ax}\cos xdx=e^{ax}(\sin x+a\cos x)+C$

ゆえに，$\displaystyle\int e^{ax}\cos xdx=\frac{e^{ax}(\sin x+a\cos x)}{a^2+1}+C$

または,

$\left(e^{ax}\cos x\right)'=ae^{ax}\cos x-e^{ax}\sin x$　・・・①

$\left(e^{ax}\sin x\right)'=e^{ax}\cos x+ae^{ax}\sin x$　・・・②

①$\times a+$②より，$a\left(e^{ax}\cos x\right)'+\left(e^{ax}\sin x\right)'=\left(a^2+1\right)e^{ax}\cos x$

すなわち $e^{ax}\cos x=\dfrac{a\left(e^{ax}\cos x\right)'+\left(e^{ax}\sin x\right)'}{a^2+1}$

よって,

$$\int e^{ax}\cos x dx=\frac{ae^{ax}\cos x+e^{ax}\sin x}{a^2+1}+C$$
$$=\frac{e^{ax}(\sin x+a\cos x)}{a^2+1}+C$$

(4)

$$\int x\log(1+x)dx=\int\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\log(1+x)dx$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\int\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\frac{x^2-1}{2}\log(1+x)-\frac{1}{2}\int(x-1)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)\log(1+x)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+C$$

150

(1)

$$f'(x)=Ae^x\cos x-Ae^x\sin x+Be^x\sin x+Be^x\cos x$$
$$=(A+B)e^x\cos x+(-A+B)e^x\sin x$$

(2)

$A+B=\alpha,\ -A+B=\beta$ とおくと,

$f'(x)=\alpha e^x\cos x+\beta e^x\sin x$ より，$f''(x)=(\alpha+\beta)e^x\cos x+(-\alpha+\beta)e^x\sin x$

よって，$\alpha+\beta=2B,\ -\alpha+\beta=-2A$ より，$f''(x)=2Be^x\cos x-2Ae^x\sin x$

これと $f(x)=Ae^x\cos x+Be^x\sin x$，$f'(x)=(A+B)e^x\cos x+(-A+B)e^x\sin x$ より,

$f''(x)=2f'(x)-2f(x)$

(3)

$f(x)=f'(x)-\frac{1}{2}f''(x)$ より，

$$\int f(x)dx=\int\left\{f'(x)-\frac{1}{2}f''(x)\right\}dx$$
$$=\int f'(x)dx-\frac{1}{2}\int f''(x)dx$$
$$=f(x)-\frac{1}{2}f'(x)+C$$
$$=Ae^x\cos x+Be^x\sin x-\frac{1}{2}\left\{(A+B)e^x\cos x+(-A+B)e^x\sin x\right\}+C$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(A-B)e^x\cos x+(A+B)e^x\sin x\right\}+C$$

151

(1)

$f(x)=\frac{1}{x^3(1-x)}$ より，　$x^3(1-x)f(x)=1$　・・・①

$f(x)=\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\frac{a_3}{x^3}+\frac{b}{1-x}$ より，　$x^3(1-x)f(x)=x^2(1-x)a_1+x(1-x)a_2+(1-x)a_3+x^3b$

すなわち $x^3(1-x)f(x)=(-a_1+b)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_2-a_3)x+a_3$　・・・②

①，②より，　$(-a_1+b)x^3+(a_1-a_2)x^2+(a_2-a_3)x+a_3-1=0$　・・・③

③は x についての恒等式だから，$\begin{cases}-a_1+b=0\\a_1-a_2=0\\a_2-a_3=0\\a_3-1=0\end{cases}$　$\therefore a_1=a_2=a_3=b=1$

(2)

(1)より，　$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{1-x}$

よって，

$$\int f(x)dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$
$$=\int\frac{1}{x}dx+\int x^{-2}dx+\int x^{-3}dx+\int\frac{1}{x-1}dx$$
$$=\log|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\log|1-x|+C$$

(3)

$$\frac{1}{x^p(1-x)}=\frac{(1-x^p)+x^p}{x^p(1-x)}$$
$$=\frac{1}{x^p}\cdot\frac{1-x^p}{1-x}+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{1}{x^p}\sum_{k=1}^{p}x^{k-1}+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{1}{x^p}\left(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}\right)+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^p}+\frac{1}{1-x}$$
$$=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{x^{k+1}}$$

より,

$p=1$ のとき

$$\int\frac{dx}{x(1-x)}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\right)dx$$
$$=\log|x|-\log|1-x|$$

$p\geq 1$ のとき

$$\int\frac{dx}{x^p(1-x)}=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}+\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{x^{k+1}}\right)dx$$
$$=\log|x|-\log|1-x|-\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{kx^k}+C$$

B

152

(1)

$df'(x)=adf(x)+bdg(x)$　・・・①　$bg'(x)=bcf(x)+bdg(x)$　・・・②

①－②より，$df'(x)-bg'(x)=(ad-bc)f(x)$　$\therefore f(x)=\dfrac{df'(x)-bg'(x)}{ad-bc}$

ゆえに，$\displaystyle\int f(x)dx=\frac{df(x)-bg(x)}{ad-bc}+C$

(2)

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^x\sin x+e^x\cos x\\ &=f(x)+g(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x)&=-e^x\sin x+e^x\cos x\\ &=-f(x)+g(x)\end{aligned}$$

よって，$a=1,\ b=1,\ c=-1,\ d=1$

(3)

解法 1

$\log x=t$ とおくと，$x=e^t$ より，$dx=e^t dt$　$\displaystyle\therefore\int\sin(\log x)dx=\int e^t\sin tdt$

(1)，(2)より，$\displaystyle\int e^x\sin xdx=\frac{e^x\sin x-e^x\cos x}{1\cdot1-1\cdot(-1)}+C'$ だから，

$$\begin{aligned}\int\sin(\log x)dx&=\int e^t\sin tdt\\ &=\frac{e^t(\sin t-\cos t)}{2}+C\\ &=\frac{x\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}}{2}+C\end{aligned}$$

解法 2

$\{\sin(\log x)\}'=\dfrac{\cos(\log x)}{x}$ より，$\cos(\log x)=x\{\sin(\log x)\}'$

よって，$\displaystyle\int\cos(\log x)dx=x\sin(\log x)-\int\sin(\log x)dx$　・・・③

$\{\cos(\log x)\}'=-\dfrac{\sin(\log x)}{x}$ より，$\sin(\log x)=-x\{\cos(\log x)\}'$

よって，$\displaystyle\int\sin(\log x)dx=-x\cos(\log x)+\int\cos(\log x)dx$　・・・④

③を④に代入し整理することにより，$\displaystyle\int\sin(\log x)dx=\frac{x\{\sin(\log x)-\cos(\log x)\}}{2}+C$

153

(1)

$$\cos^{2m-1}x=\cos x\cos^{2(m-1)}x$$
$$=\cos x\left(\cos^2 x\right)^{m-1}$$
$$=\cos x\left(1-\sin^2 x\right)^{m-1}$$
$$=\cos x\sum_{r=0}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_r\left(-\sin^2 x\right)^r$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_r(-1)^r\cos x\sin^{2r}x$$
$$=\sum_{r=0}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_r\frac{(-1)^r}{2r+1}\left(\sin^{2r+1}x\right)'$$

より，

$$\int\cos^{2m-1}xdx=\sum_{r=0}^{m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_r\frac{(-1)^r}{2r+1}\sin^{2r+1}x+C$$

ここで，$2r+1=k$ とおくと，

$k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2m-1$，　$r=\dfrac{k-1}{2}$，　$r=m-1$ のとき $k=2m-1$ より，

$$\int\cos^{2m-1}xdx=\sum_{k=1}^{2m-1}{}_{m-1}\mathrm{C}_{\frac{2k-1}{2}}\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k}\sin^k x+C\quad(k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2m-1)$$

以上より，

$n=2m-1$

a_k は $k=1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2m-1$ のとき ${}_{m-1}\mathrm{C}_{\frac{k-1}{2}}\dfrac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k}$，　$k=0,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ 2(m-1)$ のとき 0

(2)

$f(t)=\displaystyle\sum_{i=0}^{2p-1}b_it^i$ とおくと，

$$f(t)-f(-t)=2\left(b_1t+b_3t^3+\cdots+b_{2p-1}t^{2p-1}\right)$$
$$=2\sum_{j=1}^{p}b_{2j-1}t^{2j-1}$$

より，

$$f(\cos x)-f(-\cos x)=2\sum_{j=1}^{p}b_{2j-1}\cos^{2j-1}x$$

よって，

$$\int f(\cos x)dx - \int f(-\cos x)dx = \int \{f(\cos x) - f(-\cos x)\}dx$$

$$= 2\sum_{j=1}^{p} b_{2j-1}\int \cos^{2j-1} x dx$$

ここで，(1)より，$\int \cos^{2j-1} x dx = \sum_{r=0}^{j-1} {}_{j-1}\mathrm{C}_r \frac{(-1)^r}{2r+1}\sin^{2r+1} x + C'$ と表せるから，

$$\int f(\cos x)dx - \int f(-\cos x)dx = 2\sum_{j=1}^{p}\left\{b_{2j-1}\sum_{r=0}^{j-1} {}_{j-1}\mathrm{C}_r \frac{(-1)^r}{2r+1}\sin^{2r+1} x + C'\right\}$$

よって，$g(\sin x) = 2\sum_{j=1}^{p}\left\{b_{2j-1}\sum_{r=0}^{j-1} {}_{j-1}\mathrm{C}_r \frac{(-1)^r}{2r+1}\sin^{2r+1} x\right\}$ とおくと，

$\int f(\cos x)dx - \int f(-\cos x)dx = g(\sin x) + C$ を満たす多項式 $g(t)$ が存在する。